

Suites numériques

EL KYAL MOHAMED

➤ **Suite arithmétique – Suite géométrique :**

	Suite arithmétique de raison r	Suite géométrique de raison q
Définition	$u_{n+1} = u_n + r$	$u_{n+1} = q \times u_n$
Terme général	$u_n = u_p + (n - p)r$	$u_n = u_p \times q^{n-p}$
Somme de termes consécutifs	$u_p + \dots + u_n = (n - p + 1) \left(\frac{u_p + u_n}{2} \right)$	$u_p + \dots + u_n = u_p \times \left(\frac{q^{n-p+1} - 1}{q - 1} \right)$
a, b et c trois termes consécutifs	$2b = a + c$	$b^2 = a \times c$

➤ **Suite majorée, minorée, bornée :**

Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite numérique

- $(u_n)_{n \in I}$ est **majorée** par un nombre réel $M \Leftrightarrow \forall n \in I \quad u_n \leq M$
- $(u_n)_{n \in I}$ est **minorée** par un nombre réel $m \Leftrightarrow \forall n \in I \quad u_n \geq m$
- $(u_n)_{n \in I}$ est **bornée** si $(u_n)_{n \in I}$ est majorée et minorée

➤ **Monotonie d'une suite :**

Soit $(u_n)_{n \in I}$ une suite numérique

- $(u_n)_{n \in I}$ est **croissante** $\Leftrightarrow \forall n \in I \quad u_{n+1} \geq u_n$
- $(u_n)_{n \in I}$ est **décroissante** $\Leftrightarrow \forall n \in I \quad u_{n+1} \leq u_n$
- $(u_n)_{n \in I}$ est **constante** $\Leftrightarrow \forall n \in I \quad u_{n+1} = u_n$

➤ **Limite de la suite (n^α) avec $\alpha \in \mathbb{Q}^*$:**

$\alpha < 0$	$\alpha > 0$
$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = 0$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = +\infty$

➤ **Limite de la suite** (q^n) avec $q \in \mathbb{R}$:

$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$q > 1$
la suite (q^n) n'admet pas de limite	$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$	$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$

➤ **Critère de convergence d'une suite :**

- Toute suite croissante et majorée est convergente
- Toute suite décroissante et minorée est convergente

$$\left. \begin{array}{l} |u_n - \ell| \leq v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$$

$$\left. \begin{array}{l} v_n \leq u_n \leq w_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$$

$$\left. \begin{array}{l} u_n \geq v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} u_n \leq v_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$$

➤ **Suite de type** $v_n = f(u_n)$:

Si $(u_n)_{n \in I}$ une suite convergente de limite ℓ et si f une fonction continue en ℓ alors la suite (v_n) définie par: $v_n = f(u_n)$ est convergente de limite $f(\ell)$

➤ **Suite de type** $u_{n+1} = f(u_n)$:

Soit (u_n) une suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad n \in \mathbb{N} \end{cases} \quad \text{où } f \text{ une fonction}$$

Si :

- f une f continue sur un intervalle I
- $f(I) \subset I$
- $a \in I$
- (u_n) une convergente

alors : la limite ℓ de la suite $(u_n)_{n \in I}$ est solution de l'équation : $f(x) = x$